ANALOG DEVICES

小型指南
MT-229

One Technology Way • P.O. Box 9106 • Norwood, MA 02062-9106, U.S.A. • Tel: 781.329.4700 • Fax: 781.461.3113 • www.analog.com

量化噪声：公式 SNR = 6.02 N + 1.76 dB 的扩展推导

作者：ADI公司
Ching Man

引言

本指南旨在介绍信噪比公式(SNR) = 6.02 N + 1.76 dB的推导步骤，其中重点讲述了数学推导步骤。

简介

本指南描述了推导过程的三个不同阶段。

1. 理想的模数转换器(ADC)传递函数公式和操作。
2. 基于积分法的均方根(rms)推导。
3. SNR公式推导，以获得*SNR* = 6.02 *N* + 1.76 dB值。
   SNR = 6.02 *N* + 1.76 dB value.

本数学指南是对MT-001中所示推导的扩展和增强。

理想的ADC传递函数公式和操作

理想的ADC传递函数如图1 (A)所示。数字(二进制)输出值表示为y轴，模拟输入则表示为x轴。对角线阶梯表示模拟输入信号的量化值。穿过阶梯的虚线表示其中点。

图1 (B)表示采用斜坡输入信号时理想N位ADC的量化噪声。1 LSB峰峰值量化误差可以通过一个最大峰峰值摆幅为*q*(范围为*q*/2至–*q*/2)的非相关锯齿波形来近似计算。请注意，t_1和t_2为时间点，将用在稍后的推导阶段。该信号为量化输出信号(实线)与模拟输入信号(虚线)之差，如图1 (A)所示。

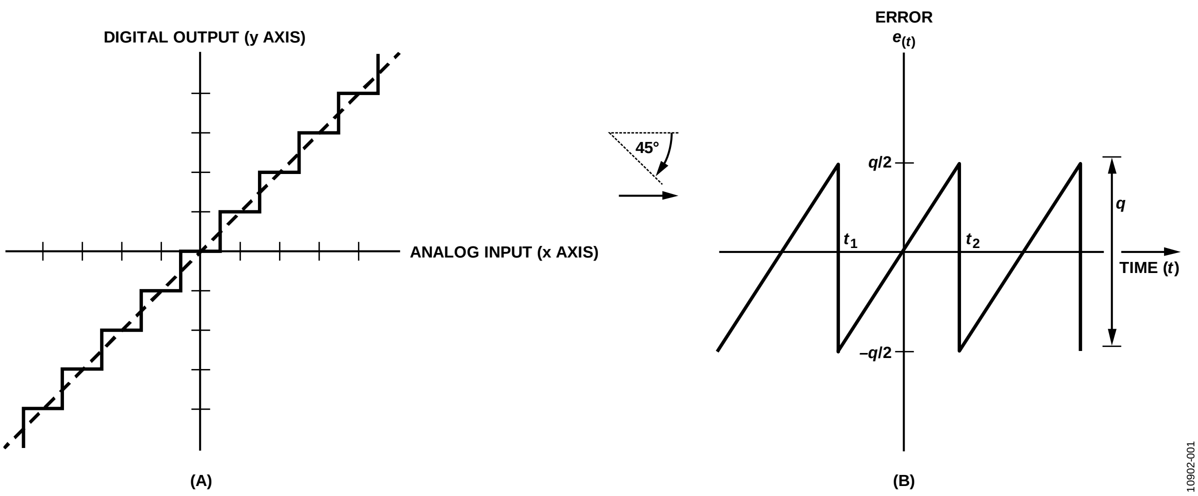

图1. 理想的ADC传递函数(A)与理想的N位ADC量化噪声(B)

直线的公式为

$$y = mx + c$$

其中：
y表示y轴值。
m为斜率。
x为x轴值。
c为直线在x=0时穿过y轴的交点。

因此，若将直线的公式代入图2，则当c为$x = 0$时，$y = 0$(即原点)。$e(t)$的误差公式为

$$e_{(t)} = st + 0 \text{ 或者 } e_{(t)} = st \quad (1)$$

其中：
$e_{(t)}$为量化误差。
s为斜率。
t为时间。

这就是一条直线的公式

$$y = mx + c$$

其中：
$y = e(t)$.
$m = s$.
$x = t$.
$c = 0$.

对于$t_1 < t < t_2$，误差e(t)在−q/2与+q/2之间变化。

在图1中，在时间t_1和t_2时，误差e(t)为

$$e(t_1) = \frac{-q}{2} = st_1$$

$$t_1 = \frac{-q}{2s} \quad (2)$$

$$e(t_2) = \frac{q}{2} = st_2$$

$$t_2 = \frac{q}{2s} \quad (3)$$

代入公式2和公式3，e(t)图形变为图2。

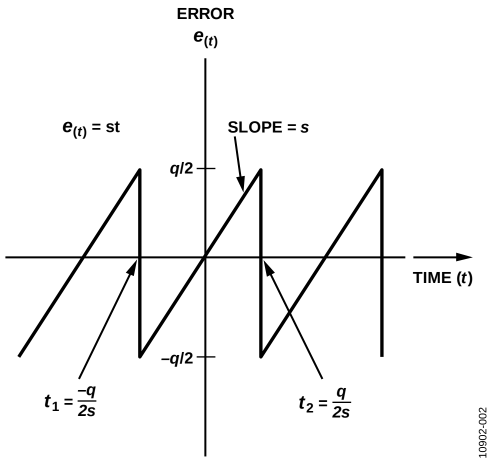

图2. 代入t_1和t_2值

RMS推导

现在，可以借助积分法和置换法进行均方根(rms)推导。图3 (A)所示为进行积分的时段T。e(t)的均方值如图3 (B)所示。

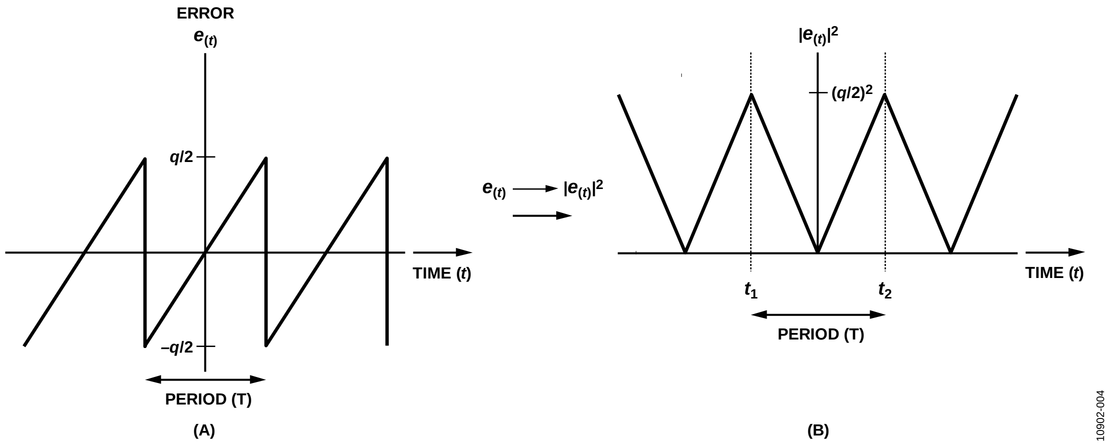

图3. 定义时段T (A)和对误差e(t)函数求平方(B)

均方误差e(t)在时段T内进行计算，其中，时间t由公式2和公式3定义

$$t_1 = \frac{-q}{2s}, \qquad t_2 = \frac{+q}{2s},$$

图3中时段T的底数的等化和定义如下

$$T = t_2 - t_1$$

$$T = \frac{q}{2s} + \frac{q}{2s}$$

$$\therefore\ T = \frac{q}{s} \tag{4}$$

均方误差

$$\bar{e}^2{}_{(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(st)^2}{T} dt \ = \frac{q^2}{12} \tag{5}$$

通过以下方式推出，即用积分法求出均方误差：

$$\bar{e}^2{}_{(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{(st)^2}{1}}{\frac{q}{s}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(st)^2}{1} \times \frac{s}{q} dt$$

$$\bar{e}^2{}_{(t)} = \frac{s}{q}\int_{t_1}^{t_2} (st)^2\, dt \tag{6}$$

$$= \frac{s}{q}\int_{t_1}^{t_2} s^2 t^2\, dt \ = \frac{s^3}{q}\int_{t_1}^{t_2} t^2\, dt$$

$$= \frac{s^3}{q}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \frac{s^3}{q}\left[\ \frac{t^3}{3}\Big|^{t_2} - \ \frac{t^3}{3}\Big|_{t_1}\ \right]$$

代入t_2和t_1的上、下限

$$= \frac{s^3}{q}\left[\frac{\left(\frac{q}{2s}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{q}{2s}\right)^3}{3}\right] \ = \ \frac{s^3}{q}\left[2\frac{\left(\frac{q}{2s}\right)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{s^3}{q} \times 2\left[\frac{\frac{q^3}{8s^3}}{\frac{3}{1}}\right] = \frac{s^3}{q} \times 2\left[\frac{q^3}{8s^3} \times \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{s^3}{q} \times 2 \times \frac{q^3}{8s^3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\cancel{s^3}}{\cancel{q}} \times \cancel{2} \times \frac{\cancel{q^3}}{\cancel{8}_4\,\cancel{s^3}} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{q^2}{4} \times \frac{1}{3}$$

由此得到均方误差

$$\bar{e}^2{}_{(t)} = \frac{q^2}{12} \qquad\qquad \text{QED}$$

均方根误差e(t)的值可从以下公式求出

$$\sqrt{\left(\bar{e}^2{}_{(t)}\right)} = \sqrt{\frac{q^2}{12}} = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{\sqrt{(4 \times 3)}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

因此，均方根量化误差e(t)为

$$\sqrt{\left(\bar{e}^2{}_{(t)}\right)} = \frac{q}{2\sqrt{3}} \tag{7}$$

假设输入信号为平均满量程(FS)正弦波($\overline{V_{(t)}}$)，则可计算出理论信噪比，其中

$$\overline{V_{(t)}} = \frac{q2^N}{2}\sin(2\pi f t) \tag{8}$$

要将正弦波转换成均方根值，只需乘以$\frac{1}{\sqrt{2}}$或0.707即可。也即,$\overline{V_{(t)}}$ x $\frac{1}{\sqrt{2}}$。因此，输入正弦波的均方根为

$$\sqrt{\bar{V}^2{}_{(t)}} = \frac{q2^N}{2\sqrt{2}}\sin(2\pi f t) \tag{9}$$

SNR推导

在此基础上，可以推导出以dB为单位的SNR公式，其中6.02 N + 1.76 dB。

根据公式9，最大幅度出现在正弦(90°) = 1时。均方根(FS)正弦波输入V(t)信号则可表示为

$$\sqrt{\bar{V}^2{}_{(t)}} = \frac{q2^N}{2\sqrt{2}} \tag{10}$$

对于理想的N位转换器(如公式10)，相对于量化噪声的均方根值(如公式7)，其均方根信噪比(即公式10/公式7)可通过以下公式计算出(单位为dB)

$$SNR = 20\, log_{10}\, \frac{RMS\ value\ of\ FS\ input}{RMS\ value\ of\ quantization\ noise} \tag{11}$$

$$SNR = 20\, log_{10}\left[\frac{\sqrt{\bar{V}^2{}_{(t)}}}{\sqrt{\left(\bar{e}^2{}_{(t)}\right)}}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\left[\frac{\frac{q2^N}{2\sqrt{2}}}{\frac{q}{2\sqrt{3}}}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\left[\frac{q2^N}{2\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{3}}{q}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\left[\frac{\cancel{q}2^N}{\cancel{2}\sqrt{2}} \times \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{q}}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\left[\frac{2^N}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\left[2^N \times \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 20\, log_{10}\, [2]^N + 20\, log_{10}\left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= N \times 20\, log_{10}\,(2) + \frac{1}{2} \times 20\, log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= N \times 20 \times 0.301 + 10 \times 0.176$$

$$\therefore SNR = \underline{6.02\,N + 1.76\,dB} \qquad \text{QED}$$

其中，N为ADC的分辨率(单位为位)。

推导过程显示，公式中的系数6.02来自$20log_{10}(2)$，项1.76 dB来自$10log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$。

总结

该公式只是一种近似表示，其假定量化误差与输入信号无关。多数情况下，当N > 6且输入信号并非精确地为采样频率的约数时，该假设是成立的。这种情况将在MT-001中详细讨论。

公式中用来确定SNR的噪声项是在奈奎斯特带宽范围内测得的噪声，即从DC至采样频率的一半。如果目标带宽小于采样频率的一半，则必须应用校正系数，如MT-001所述。

参考文献

Bennett, W. R. *Noise in PCM Systems*, Bell Labs Record, Vol. 26, December 1948, pp. 495-499.

Bennett, W. R. *Spectra of Quantized Signals*, Bell System Technical Journal, Vol. 27, July 1948, pp. 446-471.

Black, H. S. and J. O. Edson, *Pulse Code Modulation*, AIEE Transactions, Vol. 66, 1947, pp. 895-899.

Black, H. S. *Pulse Code Modulation*, Bell Labs Record, Vol. 25, July 1947, pp. 265-269.

Cattermole, K. W., *Principles of Pulse Code Modulation*, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1969, New York NY, ISBN 444-19747-8.

Kester, Walt. *Analog-Digital Conversion*, Analog Devices, Inc., 2004, ISBN 0-916550-27-3, Chapter 2. (Also Available as *The Data Conversion Handbook*, Elsevier/Newnes, 2005, ISBN 0-7506-7841-0).

MT-001 Mini Tutorial, *Taking the Mystery out of the Infamous Formula, "SNR=6.02N + 1.76dB," and Why You Should Care.* Analog Devices.

MT-003 Mini Tutorial, *Understand SINAD, ENOB, SNR, THD, THD + N, and SFDR so You Don't Get Lost in the Noise Floor.* Analog Devices.

Oliver, B.M., J. R. Pierce, and C. E. Shannon, *The Philosophy of PCM*, Proceedings IRE, Vol. 36, November 1948, pp. 1324-1331.

修订历史

2012年8月—修订版0：初始版

MT10902sc-0-8/12(0)